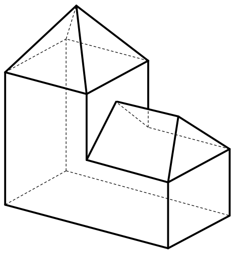
Eulers Polyedersatz

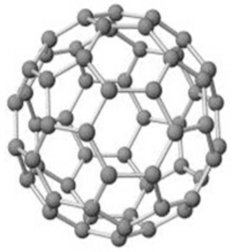
Ecken - Kanten + Flächen = 2

Beispiele

Pyramide:
5 Ecken
8 Kanten
5 Flächen
5 - 8 + 5 = 2



Kirche:
15 Ecken
26 Kanten
13 Flächen
15 - 26 + 13 = 2



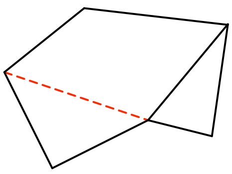
C60 Molukül (Fulleren):
60 Ecken
90 Kanten
32 Flächen
60 - 90 + 32 = 2

Der Eulersche Polyedersatz gilt für alle konvexen Polyeder (Vielflache), genau genommen sogar für jedes Polyeder, dessen Kantennetz sich kreuzungsfrei als zusammenhängender Kantengraph in die Ebene abbilden lässt.

Den Kantengraphen bekommt man, indem man eine Fläche des konvexen Polyeders entfernt und den Rest wie eine Gummihaut in die Ebene auseinander zieht. Dabei bleibt die Struktur des Kantennetzes erhalten. Für den erhaltenen ebenen Graphen muss man also zeigen, dass E - K + F = 1 (man hatte ja eine Fläche entfernt).

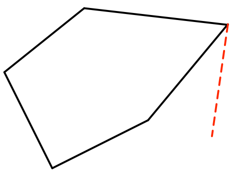
Induktiver Beweis: Entfernt man aus dem ebenen Kantengraphen eine Kante so, dass der Restgraph zusammenhängend bleibt treten zwei Fälle auf.

1. Fall: Die entfernte Kante war eine Diagonale.



Dann nimmt die Anzahl Flächen und Kanten je eins ab, die Anzahl Ecken bleibt. Somit bleibt der Wert von E - K + F erhalten.

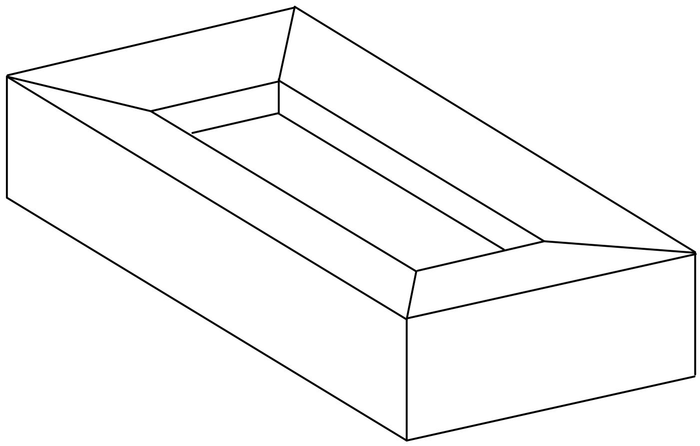
2. Fall: Die entfernte Kante war keine Diagonale.



Dann nimmt die Anzahl Ecken und Kanten je eins ab, die Anzahl Flächen bleibt. Somit bleibt auch hier der Wert von E - K + F erhalten.

Zum Schluss bleibt eine einzige Kante mit zwei Ecken ohne Fläche übrig. Es gilt dann offenbar E - K + F = 2 - 1 + 0 = 1.   QED

Es gibt aber auch Polyeder, deren Kantengraph sich nicht kreuzungsfrei als zusammenhängender Graph in die Ebene abbilden lässt. Zum Beispiel ein Bilderrahmen:



Der verallgemeinerte Eulersche Satz besagt, dass in diesem Fall

$$E - K + F = \chi$$

gilt. Dabei ist χ die sogenannte **Eulercharakteristik.** Man kann sie mit Hilfe der Formel $\chi = 2 - 2g$ ausrechnen. g ist das sogenannte **Geschlecht** des Polyeders, was wiederum die Anzahl seiner Löcher ist. Der Bilderrahmen hat *ein* Loch, also $g = 1$, und somit gilt $\chi = 2 - 2 = 0$. In der Tat hat unser Bilderrahmen 16 Ecken, 32 Kanten und 16 Flächen, also $16 - 32 + 16 = 0$.

Anwendungen: Der Eulersche Polyedersatz wird zum Beispiel benutzt, um den *Fünffarbensatz* zu beweisen. Dieser besagt, dass jede ebene Landkarte so mit fünf Farben gefärbt werden kann, dass keine zwei gleichfarbigen Länder eine gemeinsame Grenze haben. Tatsächlich genügen sogar vier Farben. Ist die Landkarte jedoch auf einem Bilderrahmen aufgemalt, benötigt man 7 Farben.

Eine weitere Anwendung ist der *Starrheitssatz von Cauchy*: Er besagt, dass konvexe Polyeder starr sind (Anwendungen in der Statik). Hingegen existieren nicht-konvexe Polyeder, die beweglich sind.

Der Eulersche Polyedersatz spielt eine wichtige Rolle in der Geometrie, Topologie, Graphentheorie, Differentialgeometrie.